

Indholdsfortegnelse

	$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$	
E17, Opgave 1: Givet ligningssystemet		11
Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet.		11
	$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	
E17, Opgave 2: Der er givet matricen		12
Bestem for matricen A samtlige egenverdier og samtlige tilhørende egenvektorer		12
Begrund, at A er en diagonaliserbar matrix, og angiv en invertibel matrix S og en diagonalmatrix L, så $L = S^{-1}AS$.		13
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 4 & 8 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
E17, Opgave 3: Der er givet matricerne		14
Udregn determinanten for A, og gør rede for, at A er invertibel		14
Løs ligningssystemet $(A-1)Tx = b$		15
	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$	
E17, Opgave 4: Der er givet matricerne		16
Gør rede for, at tallet $3+i$ er en kompleks egen værdi for matricen A, og bestem samtlige til denne egen værdi hørende komplekse egenvektorer.		16
Opskriv den fuldstændige reelle løsning til det homogene differentilligningssystem, $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$		16
Bestem en partikulær løsning til det inhomogene differentilligningssystem, $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$, og opskriv den fuldstændige reelle løsning hertil.		17
E17, Opgave 5A: En funktion f er givet ved	$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^3 - xy$	18
Vis at (1,1) er et stationært punkt for f, og bestem typen af dette stationære punkt.		18
Funktionen f har endnu et stationært punkt. Bestem dette, og bestem typen heraf		19
E17, 5B: Vi betragter det lineære system,	$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad y = (1 \ 0) \mathbf{x}$	20
Gør rede for at systemet er asymptotisk stabilt		20
Det oplyses, at systemets overføringsfunktion er	$H(s) = \frac{20 + 4s}{s^2 + 6s + 25}$	20
Bestem det stationære svar på påvirkningen	$u(t) = 2 \cos(5t) + 3 \sin(5t)$	20
E18, Opgave 1: En matrix A af type 3x3 opfylder	$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$	21
Bestem for matricen A samtlige egenverdier og for hver af disse samtlige tilhørende egenvektorer		21

Vejledende, Opgave 5B: Et lineært system har overføringsfunktionen	$H(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 1}$	53
Bestem systemets amplitudekarakteristik		53
Bestem systemets fasekarakteristik		53
	$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1$ $4x_1 + 5x_2 + 10x_4 + 11x_5 = 2$	
Blandet, Opgave 1: Givet ligningssystemet	$5x_1 + x_2 + 21x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 13.$	54
Beregn den fuldstændige løsning til ligningssystemet		54
Angiv den fuldstændige løsning til det tilsvarende homogene ligningssystem		54
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	
Blandet, Opgave 2: Der er givet matricen		55
Beregn determinanten af A, og gør rede for, at A er invertibel		55
Udregn matricen A^{-1}		55
Afgør, om	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ udgør et lineært afhængigt eller et lineært uafhængigt sæt af vektorer	56
	$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
Blandet, Opgave 3: Der er givet matricen		57
Bestem samtlige egenværdier og samtlige tilhørende egenvektorer for A		57
Angiv den algebraiske og den geometriske multiplicitet for hver af egenværdierne for A		58
Begrund, at A er diagonaliserbar, og angiv en invertibel matrix S og en diagonalmatrix L,		58
så $L = S^{-1}AS$		58
	$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	
Blandet, Opgave 4: Der er givet matricen		59
Beregn samtlige egenværdier og samtlige tilhørende egenvektorer for matricen A		59
Angiv den algebraiske multiplicitet og den geometriske multiplicitet af hver af egenværdierne for matricen A, og afgør om A er diagonaliserbar		59
	$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ og $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$	
Blandet, Opgave 5: Der er givet matricerne		60
Beregn egenværdierne for A, og beregn samtlige tilhørende egenvektorer		60
Opskriv den fuldstændige løsning til det homogene differentiaalligningssystem	$x'(t) = Ax(t)$	61
Bestem en partikulær løsning til det inhomogene differentiaalligningssystem	$x'(t) = Ax(t) + b$ og opskriv den fuldstændige løsning hertil	61
Blandet, Opgave 6: Et lineært differentiaalligningssystem $x'(t) = Ax(t)$ har den fuldstændige løsning		
$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.		62

Bestem samtlige komplekse egenverdier for matricen A og for hver af disse samtlige	95
tilhørende komplekse egenvektorer	95
F20, Opgave 5A: En funktion f af de reelle variable x og y er givet ved $f(x,y) = 4x^3 + 12xy + 3y^2 - 36x$	96
Vis, at (3,-6) er et stationært punkt for funktionen f, og bestem typen af dette stationære	96
punkt.	96
Funktionen f har endnu et stationært punkt. Bestem dette stationære punkt og dets type	96
F20, Opgave 5B: Der er givet det lineære system $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}\mathbf{x}(t)$ hvor	
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{r} = (1 \ -2)$	97
Bestem overføringsfunktionen for det lineære system	97
Bestem den værdi af vinkelfrekvensen w, hvor det stationære svar på påvirkningen	97
$u(t) = 10\cos(\omega t)$ får amplituden 2	97

E17, 5B: Vi betragter det lineære system, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} u(t)$, $y = (1 \ 0) \mathbf{x}$

Gør rede for at systemet er asymptotisk stabilt.

Systemet er asymptotisk stabilt, hvis alle egenverdier for systemmatrixen \mathbf{A} har negativ realdel. Det karakteristiske polynomium for \mathbf{A} er

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 8 \\ -4 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-7 - \lambda) - (-4) \cdot 8 = \lambda^2 + 6\lambda + 25.$$

Diskriminanten er $6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64$, så rødderne, d.v.s. egenverdierne for \mathbf{A} , er

$$\lambda = \frac{-6 \pm i \cdot \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i,$$

som har negativ realdel, hvormed det er vist, at systemet er asymptotisk stabilt.

Det oplyses, at systemets overføringsfunktion er $H(s) = \frac{20 + 4s}{s^2 + 6s + 25}$

Bestem det stationære svar på påvirkningen $u(t) = 2 \cos(5t) + 3 \sin(5t)$

Begge led i påvirkningen $u(t) = 2 \cos(5t) + 3 \sin(5t)$ har frekvensen $\omega = 5$. Da

$$H(5i) = \frac{20 + 4 \cdot 5i}{(5i)^2 + 6 \cdot 5i + 25} = \frac{20 + 20i}{-25 + 30i + 25} = \frac{2 + 2i}{3i} = \frac{(2 + 2i) \cdot i}{3i \cdot i} = \frac{2i - 2}{-3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i,$$

er amplitudekarakteristikken for begge led

$$A(5) = |H(5i)| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot 2 = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

og, da $\operatorname{Re}(H(5i)) = \frac{2}{3} > 0$, er fasekarakteristikken for begge led

$$\Phi(5) = \arg(H(5i)) = \arctan\left(-\frac{2/3}{2/3}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Det stationære svar er således (hvor superpositionsprincippet benyttes)

$$y_s(t) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\left(2 \cos\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{2}{3}\sqrt{2}\left(3 \sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2}\cos\left(5t - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Funktionen f har yderligere to stationære punkter. Bestem hvert af disse stationære punkter, og bestem deres type

Det ses med nulreglen, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee y - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 4.$$

Vi får nu med $x = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 0^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

5

Dermed er fundet, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for funktionen f . Endvidere fås nu med $y = 4$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 4) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2.$$

Så $(2, 4)$ og $(-2, 4)$ – som vi allerede ved $(-2, 4)$ er stationære punkter for funktionen f .

Vi finder

$$\mathbf{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathbf{H}(0, 0)$ er en diagonalmatrix, så er diagonalelementerne lig egenverdierne, og da disse begge er negative, er det vist, at funktionen f har et *lokalt maksimum* i $(0, 0)$.

Endelig fås, at

$$\mathbf{H}(2, 4) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(\mathbf{H}(2, 4)) = 0 \cdot (-2) - 8 \cdot 8 = -64 < 0$ har egenverdierne for $\mathbf{H}(2, 4)$ modsatte fortegn, så funktionen f har et *saddelpunkt* i $(2, 4)$.

F19, Opgave 1: For ethvert reelt tal a er givet vektorerne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$ og $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 9 \end{pmatrix}$

Bestem de værdier af tallet a , for hvilke vektorerne $v_1; v_2$ og v_3 er lineært uafhængige

Vi søger de værdier af tallet a , hvor vektorligningen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \mathbf{0}$$

kun har nulløsningen. Indsættelse af koordinaterne for vektorerne giver de tre koordinatligninger

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + ax_3 &= 0 \\ -x_1 + ax_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Totalmatrix for ligningssystemet opskrives og reduceres med Gauss elimination

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & a & 0 \\ -1 & a & 9 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{r'_2=r_2-2r_1 \\ r'_3=r_3+r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & a-10 & 0 \\ 0 & a+3 & 14 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{r'_3=r_3-(a+3)r_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & a-10 & 0 \\ 0 & 0 & 14-(a+3)(a-10) & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Der er andre løsninger end nulløsningen netop når

$$\begin{aligned} 14 - (a+3)(a-10) &= 0 \Leftrightarrow -a^2 + 7a + 44 = 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 44}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{225}}{-2} = \begin{cases} -4 \\ 11 \end{cases}. \end{aligned}$$

Der er altså kun nulløsningen, d.v.s. vektorerne v_1, v_2 og v_3 er lineært uafhængige, for $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 11\}$.