Indholdsfortegnelse

E17, 5B: Vi betragter det lineære system, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad y = (1 \quad 0)\,\mathbf{x}$

Gør rede for at systemet er asymptotisk stabilt.

Systemet er asymptotisk stabilt, hvis alle egenværdier for systemmatricen $\mathbf{A}$ har negativ realdel. Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ er

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ -4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-7-\lambda) - (-4)\cdot 8 = \lambda^2 + 6\lambda + 25.$$

Diskriminanten er $6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64$, så rødderne, d.v.s. egenværdierne for $\mathbf{A}$, er

$$\lambda = \frac{-6 \pm i \cdot \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i,$$

som har negativ realdel, hvormed det er vist, at systemet er asymptotisk stabilt.

Det oplyses, at systemets overføringsfunktion er $H(s) = \dfrac{20+4s}{s^2+6s+25}$

Bestem det stationære svar på påvirkningen $u(t) = 2\cos(5t) + 3\sin(5t)$

Begge led i påvirkningen $u(t) = 2\cos(5t) + 3\sin(5t)$ har frekvensen $\omega = 5$. Da

$$H(5i) = \frac{20 + 4 \cdot 5i}{(5i)^2 + 6 \cdot 5i + 25} = \frac{20 + 20i}{-25 + 30i + 25} = \frac{2+2i}{3i} = \frac{(2+2i)\cdot i}{3i \cdot i} = \frac{2i-2}{-3} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}i,$$

er amplitudekarakteristikken for begge led

$$A(5) = |H(5i)| = \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3})^2} = \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 \cdot 2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{2},$$

og, da $\mathrm{Re}(H(5i)) = \frac{2}{3} > 0$, er fasekarakteristikken for begge led

$$\Phi(5) = \arg(H(5i)) = \arctan(-\tfrac{2}{3}/\tfrac{2}{3}) = \arctan(-1) = -\tfrac{\pi}{4}.$$

Det stationære svar er således (hvor superpositionsprincippet benyttes)

$$y_s(t) = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big(2\cos(5t - \tfrac{\pi}{4})\big) + \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big(3\sin(5t - \tfrac{\pi}{4})\big) = \tfrac{4}{3}\sqrt{2}\cos(5t - \tfrac{\pi}{4}) + 2\sqrt{2}\sin(5t - \tfrac{\pi}{4}).$$

Funktionen f har yderligere to stationære punkter. Bestem hvert af disse stationære punkter, og bestem deres type

Det ses med nulreglen, at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 0 \vee y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee y = 4\,.$$

Vi får nu med $x = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 0^2 - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0\,.$$

5

Dermed er fundet, at $(0,0)$ er et stationært punkt for funktionen f. Endvidere fås nu med $y = 4$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -2\,.$$

Så $(2,4)$ og – som vi allerede ved – $(-2,4)$ er stationære punkter for funktionen f.

Vi finder

$$\mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathbf{H}(0,0)$ er en diagonalmatrix, så er diagonalelementerne lig egenværdierne, og da disse begge er negative, er det vist, at funktionen f har et *lokalt maksimum* i $(0,0)$.

Endelig fås, at

$$\mathbf{H}(2,4) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(\mathbf{H}(2,4)) = 0 \cdot (-2) - 8 \cdot 8 = -64 < 0$ har egenværdierne for $\mathbf{H}(2,4)$ modsatte fortegn, så funktionen f har et *saddelpunkt* i $(2,4)$.

F19, Opgave 1: For ethvert reelt tal **a** er givet vektorerne $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 9 \end{pmatrix}$

Bestem de værdier af tallet **a**, for hvilke vektorerne **v**1;**v**2 og **v**3 er lineært uafhængige

Vi søger de værdier af tallet a, hvor vektorligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

kun har nulløsningen. Indsættelse af koordinaterne for vektorerne giver de tre koordinatligninger

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + ax_3 &= 0 \\ -x_1 + ax_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Totalmatrix for ligningssystemet opskrives og reduceres med Gauss elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & a & 0 \\ -1 & a & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3'=r_3+r_1]{r_2'=r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & a-10 & 0 \\ 0 & a+3 & 14 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3'=r_3-(a+3)r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & a-10 & 0 \\ 0 & 0 & 14-(a+3)(a-10) & 0 \end{array}\right).$$

Der er andre løsninger end nulløsningen netop når

$$14-(a+3)(a-10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a^2+7a+44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot(-1)\cdot 44}}{2\cdot(-1)} = \frac{-7\pm\sqrt{225}}{-2} = \begin{cases} -4 \\ 11 \end{cases}.$$

Der er altså kun nulløsningen, d.v.s. vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uafhængige, for $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 11\}$.