

Indholdsfortegnelse

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'(t)+3y(t) = 7e^{4t}$	6
Find den løsning til differentialligningen der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0) = 2$	6
Find den løsning til differentialligningen $y'(t) = \sin(t)y(t)^2$, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0)=1$	7
Find den løsning til differentialligningen, der opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0)=0$	7
Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y''(t)-12y'(t)+40y(t) = 0$	8
Bestem lineariseringen af funktionen $f(t,u) = t^2/u$ med udviklingspunkt $(1,3)$	9
Bestem den komplekse konstant k så $Z(t) = ke^{2it}$ er en løsning til differentialligningen $Z''(t)+2Z'(t)-8Z(t) = -40e^{2it}$	10
Konstanten k skal angives på rektangulær form	10
Bestem det 2. ordens Taylorpolynomium med udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen $y'(t) = (y(t))^2 + e^t$ som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0)=2$	11
Angiv det komplekse tal $z = 2e^{i\pi}e^{-i\pi/4}$ på både polær og rektangulær form, og indtegn det i den komplekse talplan	12
Vis ved hjælp af divisionsalgoritmen, at polynomiet $z^2 + 3$ er en faktor i polynomiet $3z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 15z - 12$	13
Bestem samtlige rødder i 3. grads polynomiet $p(z) = (z-2)(z^2-2z+ 10)$	13
Find den partikulære løsning til differentialligningen $y'(t) + 2y(t) = 5e^{-2t}$, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(0)=1$	14
Beregn lineariseringen af funktionen $f(t, u) = \sqrt{t} \cos(\pi/4 u)$ med udviklingspunkt $(2,1)$	15
Bestem det 2. ordens Taylorpolynomium med udviklingspunkt 2 for den løsning til differentialligningen $y'(t) = (y(t))^3 + t$, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(2) = 1$	16
Beregn den fuldstændige løsning til differentialligningen $y''(t) + 8y'(t) + 16y(t) = 0$	17
Vis ved indsættelse, at funktionen $y(t) = 2e^{3t}$ er en partikulær løsning til differentialligningen $y''(t)-5y(t) = 8e^{3t}$	17
Givet det komplekse tal $z=1 - 7i + 4i$	18
Bestem tallet z på rektangulær form	18
Bestem tallet z^6 på polær form	18
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $y''(t)+13y'(t)+40y(t) = 0$	19
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $y''(t)+13y'(t)+40y(t) = 18e^{-5t}$	19
Givet funktionen $f(t,u) = t^3-3t-u^2+2u$	21
Funktionen f har to stationære punkter. Bestem hvert af disse	21
Bestem det 2. ordens Taylorpolynomium med udviklingspunkt 1 til den løsning til differentialligningen $y'(t) = y(t)^3 - 5\ln(t)$, $t > 0$, som opfylder, at $y(1) = -1$	22

Givet differentialligningen $y'(t) - 3ty(t) = 2t^4 + 5t, t > 0$	67
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen	67
Bestem den løsning til differentialligningen, som opfylder, at $y(2) = -4$	68
Givet funktionen $f(t, u) = t^4 - 8t^3 + 12tu - 6u^2 + 4t + 36u$	69
Vis, at punktet $(2, 5)$ er et stationært punkt for funktionen f	69
Funktionen f har i alt tre stationære punkter. Bestem hvert af disse	70
Bestem den differentialligning af typen $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$	71
Hvor a og b er reelle konstanter, der har funktionen $5t e^{-2t}$ som en af sine løsninger	71
Givet det komplekse tal $z = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$	72
Bestem tallet z på rektangulær form	72
Bestem tallet z^5 på polær form	72
Givet funktionen $f(t, u) = 14t^4 + 5u^3 - 6t^2 - 16t + 7$	73
Vis, at punktet $(-2, 0)$ er et stationært punkt for funktionen f	73
Vis, at funktionen f har netop ét stationært punkt mere, og bestem dette punkt	73
Givet differentialligningen $y'(t) = y(t)^2 (2t - 3\sin(2t))$	74
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen	74
Bestem til differentialligningen såvel den løsning, der opfylder at $y(0) = 2$, som den løsning, der opfylder at $y(2) = 0$	75
Bestem det 2. ordens Taylorpolynomium med udviklingspunkt 1 til den løsning til differentialligningen	76
$y'(t) = \ln(y(t) - t^4 - 3y(t))$, som opfylder, at $y(1) = 2$	76
Der er givet differentialligningen $y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = 0$ (1)	77
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen (1)	77
Desuden er givet den komplekse differentialligning $Z''(t) + 7Z'(t) + 10Z(t) = 30e^{(-1+2i)t}$ (2) og den reelle differentialligning $y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = 30e^{-t} \cos(2t)$ (3)	77
Bestem tallet K , så $Z_p(t) = Ke^{(-1+2i)t}$ er en kompleks partikulær løsning til differentialligningen (2)	77
Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen (3)	78

Bestem den komplekse konstant k så $Z(t) = ke^{2it}$ er en løsning til differentialligningen $Z''(t) + 2Z'(t) - 8Z(t) = -40e^{2it}$.

Konstanten k skal angives på rektangulær form

For det givne gæt finder vi

$$Z(t) = ke^{2it}, \quad Z'(t) = 2kie^{2it}, \quad Z''(t) = -4ke^{2it}$$

som indsættes i differentialligningen

$$Z''(t) + 2Z'(t) - 8Z(t) = -40e^{2it}$$

$$-4ke^{2it} + 2 \cdot 2kie^{2it} - 8ke^{2it} = -40e^{2it}$$

$$(-4k + 4ki - 8k)e^{2it} = -40e^{2it}$$

$$(-12 + 4i)k = -40$$

$$k = -\frac{40}{-12 + 4i}$$

der omskrives på rektangulær form som følger

$$k = -\frac{40}{-12 + 4i} = -\frac{10}{-3 + i} = -\frac{10(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = -\frac{10(-3 - i)}{10} = \underline{\underline{3 + i}}$$

Givet det komplekse tal $z = \sqrt{3} - i$

Bestem tallet z på polær form

Givet det komplekse tal

$$z = \sqrt{3} - i.$$

Vi finder modulus og argument for z

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \quad (\text{da } \operatorname{Re}(z) > 0),$$

så den polære form af z er

$$z = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Bestem tallet z^5 på rektangulær form

Vi finder z^5 på rektangulær form ved at udnytte z på polær form

$$z^5 = (2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i})^5 = 2^5 \cdot e^{-\frac{5\pi}{6}i} = 32 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 32 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) \right) = -16\sqrt{3} - 16i.$$

Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen $y''(t) - 8y'(t) + 20y(t) = 0$

Differentialligningen $y''(t) - 8y'(t) + 20y(t) = 0$ er lineær, homogen og af 2. orden. Karakterligningen er

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0.$$

Diskriminanten er $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = -16$, så

$$\lambda = \frac{-(-8) \pm i\sqrt{16}}{2} = 4 \pm 2i$$

er løsningerne til karakterligningen. Den fuldstændige løsning til differentialligningen er derfor

$$y(t) = c_1 \cdot e^{4t} \cos(2t) + c_2 \cdot e^{4t} \sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen $y''(t) - 8y'(t) + 20y(t) = 26e^{7t}$

Som en partikulær løsning til differentialligningen

$$y''(t) - 8y'(t) + 20y(t) = 26e^{7t}$$

gættes på en funktion af typen $y_p(t) = k \cdot e^{7t}$, som indsættes i differentialligningens venstreside:

$$k \cdot 7^2 \cdot e^{7t} - 8 \cdot k \cdot 7 \cdot e^{7t} + 20 \cdot k \cdot e^{7t} = 13 \cdot k \cdot e^{7t},$$

altså passer gættet for $k = 2$, og struktursætningen giver derfor, at den fuldstændige løsning til differentialligningen $y''(t) - 8y'(t) + 20y(t) = 26e^{7t}$ er

$$y(t) = 2e^{7t} + c_1 \cdot e^{4t} \cos(2t) + c_2 \cdot e^{4t} \sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$