Indholdsfortegnelse

Bestem den komplekse konstant k så Z(t) =ke2^{it} er en løsning til differentialligningen $Z''(t)+2Z'(t)-8Z(t) = -40e^{2it}$.

Konstanten k skal angives på rektangulær form

For det givne gæt finder vi

$$Z(t) = ke^{2it}, \qquad Z'(t) = 2kie^{2it}, \qquad Z''(t) = -4ke^{2it}$$

som indsættes i differentialligningen

$$\begin{aligned}
Z''(t) + 2Z'(t) - 8Z(t) &= -40e^{2it} \\
-4ke^{2it} + 2 \cdot 2kie^{2it} - 8ke^{2it} &= -40e^{2it} \\
(-4k + 4ki - 8k)e^{2it} &= -40e^{2it} \\
(-12 + 4i)k &= -40 \\
k &= -\frac{40}{-12 + 4i}
\end{aligned}$$

der omskrives på rektangulær form som følger

$$k = -\frac{40}{-12+4i} = -\frac{10}{-3+i} = -\frac{10(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = -\frac{10(-3-i)}{10} = \underline{\underline{3+i}}$$

Givet det komplekse tal z=√3−i

Bestem tallet z på polær form

Givet det komplekse tal

$$z = \sqrt{3} - i.$$

Vi finder modulus og argument for z

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\arg(z) = \arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = \arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6} \quad (\text{da } \mathrm{Re}(z) > 0),$$

så den polære form af z er

$$z = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Bestem tallet z^5 på rektangulær form

Vi finder z^5 på rektangulær form ved at udnytte z på polær form

$$z^5 = (2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i})^5 = 2^5 \cdot e^{-\frac{5\pi}{6}i} = 32\left(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})\right) = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2})\right) = -16\sqrt{3} - 16i.$$

Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen $y''(t)-8y'(t)+20y(t)=0$

Differentialligningen $y''(t)-8y'(t)+20y(t)=0$ er lineær, homogen og af 2. orden. Karakterligningen er

$$\lambda^2-8\lambda+20=0.$$

Diskriminanten er $D=(-8)^2-4\cdot1\cdot20=-16$, så

$$\lambda=\frac{-(-8)\pm i\sqrt{16}}{2}=4\pm 2i$$

er løsningerne til karakterligningen. Den fuldstændige løsning til differentialligningen er derfor

$$y(t)=c_1\cdot\mathrm{e}^{4t}\cos(2t)+c_2\cdot\mathrm{e}^{4t}\sin(2t),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen $y''(t)-8y'(t)+20y(t)=26e^{7t}$

Som en partikulær løsning til differentialligningen

$$y''(t)-8y'(t)+20y(t)=26\,\mathrm{e}^{7t}$$

gættes på en funktion af typen $y_p(t)=k\cdot\mathrm{e}^{7t}$, som indsættes i differentialligningens venstreside:

$$k\cdot7^2\cdot\mathrm{e}^{7t}-8\cdot k\cdot7\cdot\mathrm{e}^{7t}+20\cdot k\cdot\mathrm{e}^{7t}=13\cdot k\cdot\mathrm{e}^{7t},$$

altså passer gættet for $k=2$, og struktursætningen giver derfor, at den fuldstændige løsning til differentialligningen $y''(t)-8y'(t)+20y(t)=26\,\mathrm{e}^{7t}$ er

$$y(t)=2\,\mathrm{e}^{7t}+c_1\cdot\mathrm{e}^{4t}\cos(2t)+c_2\cdot\mathrm{e}^{4t}\sin(2t),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$