

## Indhold

<b>Matricer:</b> .....	4
<i>Opgave 1 - Prøveeksamen</i> .....	4
a) Opstil ligningssystemet på matrixform, dvs. bestem A, x og b så systemet af ligninger kan skrives $Ax = b$ ...	4
b) Find den eller de værdier af a hvor ligningssystemet <i>ikke</i> har én unik løsning.....	4
c) Brug Cramers regel til at finde en løsning til ligningssystemet for $a = 0$ .....	5
<i>Opgave 1 - (2019-2020_Jan_DA)</i> .....	6
a) Bestem A, x og b så systemet af ligninger kan skrives på matrixform som: $Ax = b$ .....	6
b) Undersøg om ligningssystemet har én unik løsning.....	7
c) Beregn CA og AD .....	7
d) Bestem skalaren $\alpha$ så $\alpha C = A^{-1}$ .....	8
e) Find den vektor x som er løsning til matrixligningen $Ax = b$ .....	8
<i>Opgave 4 - (2018-2019_Jan_DA)</i> .....	9
a) Vis at $(AB)C = A(BC)$ .....	9
<i>Opgave 4 - (2017-2018_Jan_DA)</i> .....	10
Beregn $A+B$ , $A'C'$ , $-D$ og $(CE)'$ .....	10
<i>Opgave 4 - (2018-2019_Feb_DA)</i> .....	11
Find AB, CD og CE. Undersøg dernæst om A, B, C, D og E er singulære eller ikke-singulære matricer .....	11
<i>Opgave 1 - (2018-2019_Aug_DA)</i> .....	12
a) Skriv ligningssystemet på matrixform, dvs. specificér A, x og b i ligningen $Ax = b$ .....	12
b) Vis at ligningssystemet kun har én unik løsning.....	12
c) Find den inverse matrix $A^{-1}$ .....	12
d) Find den vektor x som er løsningen til matrixligningen .....	12
<b>Implicit differentiation</b> .....	13
<i>Opgave 2 - Prøveeksamen</i> .....	13
a) Find $y' = g'(x)$ udtrykt ved x og y.....	13
<b>Integraler</b> .....	14
<i>Opgave 3 - Prøveeksamen</i> .....	14
Afgør om nedenstående integraler er konvergente, og hvis de er, beregn deres værdi.....	14
a) $\int_0^{\infty} (x^2 - 2x)e^{-2x} dx$ .....	14
b) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x)e^{-2x} dx$ .....	16
<i>Opgave 2 - (2019-2020_Jan_DA)</i> .....	16
a) Beregn det ubestemte integral: $\int (2x + 1)e^{-x} dx$ .....	16
b) Beregn det bestemte integral $\int_0^a (2x + 1)e^{-x} dx$ .....	17

- c) Brug Cramers regel til at finde en løsning til ligningssystemet for  $a = 0$ .

For  $a = 0$  er determinanten  $|A| = 1 + 0 = 1$  og dermed findes der én unik løsning og Cramers regel kan dermed anvendes.

Cramers regel er som følger:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Det vil sige at formlerne for  $x_1, x_2$  og  $x_3$  er som følger:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

For at finde  $x_1$  laver jeg kofaktorudvikling langs 1. kolonne, i den tilsvarende matrix.

$$a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 0 * (-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 2 * (-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(1 * (-3) - (-4) * 1) + 2(-1 * 1 - 1 * (-1)) \\ &= 1(-3 + 4) + 2(-1 + 1) \\ &= 1 * 1 + 2 * 0 = 1 \end{aligned}$$

For at finde  $x_2$  laver jeg kofaktorudvikling langs 2. række, i den tilsvarende matrix.

$$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

Altså er  $(AB)C = A(BC)$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{pmatrix} = A(BC) = \begin{pmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{pmatrix}$$

Opgave 4 - (2017-2018\_Jan\_DA)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beregn  $A+B$ ,  $A'C'$ ,  $-D$  og  $(CE)'$

**A+B:**

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+(-1) \\ 0+4 & -1+(-1) & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

**A'C'**

$A'$  = transponering. Transponering bytter rundt på rækker og søjler i en matrix. For ikke kvadratiske matricer ændre transponering på dimensionerne.

$$A'C' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}' * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1+0*2 & 2*3+0*(-1) \\ 3*1-1*2 & 3*3+(-1)*(-1) \\ 1*1+2*2 & 1*3+2*(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**-D**

$$-D = -1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**$(CE)' = E'C'$  -> jævnfør regler for transponering. Bemærk at der byttes rundt på rækkefølgen ved produkter.**

$$(CE)' = E'C' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}' = (1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (1*1-1*2 \quad 1*3-1*(-1)) = (-1 \quad 4)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 - 2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}(2x - 2) - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) \\
&\quad \Downarrow \text{flytter } -e^{-2x} \text{ uden for parentes } \Downarrow \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 - 2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\left(\frac{1}{2}(2x - 2) + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad \Downarrow \text{sætter hele ligningen i parentes og flytter } -\frac{1}{2}e^{-2x} \text{ udenfor } \Downarrow \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}(2x - 2) + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad \Downarrow \text{ ganger } \frac{1}{2} \text{ ind i parentes } (2x - 2) \Downarrow \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 - 2x + x - 1 + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad \Downarrow \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) \\
&\quad \Downarrow \text{ ganger } -\frac{1}{2} \text{ ind i parentes } \Downarrow \\
&= e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C
\end{aligned}$$

Altså er det ubestemte integral  $\int (x^2 - 2x)e^{-2x} dx = e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C$

For at finde det bestemte integral, skal jeg bruge formlen for uegentlige integraler:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Jeg finder dermed det bestemte integral således:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (x^2 - 2x)e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (x^2 - 2x)e^{-2x} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ e^{-2x} \left( -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \right]_0^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( e^{-2b} \left( -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4} \right) - e^{-2 \cdot 0} \left( -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \right) \right) \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{e^{-2b} \cdot b^2}{2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-2b} \cdot b}{2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-2b}}{4} - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{4}
\end{aligned}$$