Indhold

c) Brug Cramers regel til at finde en løsning til ligningssystemet for $\boldsymbol{a} = 0$.

For $a = 0$ er determinanten $|\mathrm{A}| = 1 + 0 = 1$ og dermed findes der én unik løsning og Cramers regel kan dermed anvendes.

Cramers regel er som følger:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|}$$

Det vil sige at formlerne for x_1, x_2 og x_3 er som følger:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

For at finde x_1 laver jeg kofaktorudvikling langs 1. kolonne, i den tilsvarende matrix.

$$a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 0 * (-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 2 * (-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 * (-3) - (-4) * 1) + 2(-1 * 1 - 1 * (-1))$$

$$= 1(-3 + 4) + 2(-1 + 1)$$

$$= 1 * 1 + 2 * 0 = 1$$

For at finde x_2 laver jeg kofaktorudvikling langs 2. række, i den tilsvarende matrix.

$$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

Altså er $(AB)C = A(BC)$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{pmatrix} = A(BC) = \begin{pmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{pmatrix}$$

Opgave 4 - (2017-2018_Jan_DA)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beregn A+B, A’C’, -D og (CE)’

A+B:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+(-1) \\ 0+4 & -1+(-1) & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

A’C’

A’ = transponering. Transponering bytter rundt på rækker og søjler i en matrix. For ikke kvadratiske matricer ændre transponering på dimensionerne.

$$A'C' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}' * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1+0*2 & 2*3+0*-1 \\ 3*1-1*2 & 3*3+(-1)*(-1) \\ 1*1+2*2 & 1*3+2*(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

-D

$$-D = -1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(CE)’ = E’C’ -> jævnfør regler for transponering. Bemærk at der byttes rundt på rækkefølgen ved produkter.

$$(CE)' = E'C' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*1-1*2 & 1*3-1*(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 - 2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}(2x-2) - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$\Updownarrow \mathit{flytter} - e^{-2x}\mathit{uden\,for\,parentes} \Updownarrow$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 - 2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\left(\frac{1}{2}(2x-2) + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Updownarrow \mathit{sætter\ hele\ ligningen\ i\ parentes\ og\ flytter}\ -\frac{1}{2}e^{-2x}\mathit{udenfor} \Updownarrow$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}(2x-2) + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Updownarrow \mathit{ganger}\frac{1}{2}\mathit{ind\ i\ parentesen}\ (2x-2) \Updownarrow$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 - 2x + x - 1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Updownarrow \mathit{ganger} -\frac{1}{2}\mathit{ind\ i\ parentesen} \Updownarrow$$

$$= e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C$$

Altså er det ubestemte integral $\int(x^2 - 2x)e^{-2x}\,dx = e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C$

For at finde det bestemte integral, skal jeg bruge formlen for uegentlige integraler:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Jeg finder dermed det bestemte integral således:

$$\int_0^\infty (x^2 - 2x)e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (x^2 - 2x)e^{-2x}\,dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \Big|_0^b e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

$$\lim_{b\to\infty}(e^{-2b}\left(-\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\right) - e^{-2*0}\left(-\frac{1}{2}*0^2 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}\right))$$

$$\lim_{b\to\infty} - \frac{e^{-2b}*b^2}{2} + \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-2b}*b}{2} + \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-2b}}{4} - \lim_{a\to\infty}\frac{1}{4}$$