Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 15. december 2018

Kursusnavn: **BasisMat 2** - Videregående matematik for diplomingeniører

Kursusnr.: 01920

Tilladte hjælpemidler: Alle

Varighed: 3 timer

"Vægtning": De stillede spørgsmål indgår med lige vægt.

Supplerende oplysninger:
Opgaverne skal regnes i hånden. Dog tillades brug af Maple-kommandoen `RowOperation`. Lommeregner og computer må i øvrigt kun benyttes til kontrol. Alle svar skal begrundes, og der skal anføres mellemregninger og en forbindende tekst, så tankegangen bag besvarelsen fremgår klart.

Opgave 1 En matrix $\mathbf{A}$ af type 3×3 opfylder

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem for matricen $\mathbf{A}$ samtlige egenværdier og for hver af disse samtlige tilhørende egenvektorer.

b) Begrund, at matricen $\mathbf{A}$ er diagonaliserbar, og angiv en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ og en invertibel matrix $\mathbf{S}$, så $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Opgave 2 Der er givet matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 12 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Gør rede for, at matricen $\mathbf{A}$ er invertibel, og bestem $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Bestem den matrix $\mathbf{B}$, for hvilken $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$.

Opgave 3 For ethvert reelt tal a er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= a. \end{aligned}$$

a) Bestem for enhver værdi af tallet a den fuldstændige løsning til ligningssystemet.

OPGAVESÆTTET FORTSÆTTER PÅ NÆSTE ARK

Opgave 2(b)

Vi finder ved at gange igennem fra venstre med $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & -5 & -1 \\ 48 & -20 & -3 \\ 17 & -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 11 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

hvor f.eks. elementet i første række og første søjle i $\mathbf{B}$ er beregnet som produktet af første række i $\mathbf{A}^{-1}$ med første søjle i $\mathbf{C}$, altså $12 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 12 - 10 + 1 = 3$.

Opgave 3(a)

Totalmatrix for ligningssystemet opskrives og reduceres med Gauss-Jordan elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & a \end{array}\right) \xrightarrow{r_2' = r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & a \end{array}\right) \xrightarrow{r_3' = r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right).$$

Ligningssystemets har ingen løsning når $a - 5 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a \neq 5$.
For $a = 5$ fås

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1' = r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 13 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der er to frie variable, $x_3 = t_1$ og $x_4 = t_2$. Rækkerne i den fuldstændigt reducerede totalmatrix svarer til ligningerne

$$x_1 - 11x_3 + 13x_4 = -8 \quad \text{og} \quad x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 5\,,$$

altså fås

$$x_1 = -8 + 11t_1 - 13t_2 \quad \text{og} \quad x_2 = 5 - 4t_1 + 4t_2\,.$$

Den fuldstændige løsning til ligningssystemet når $a = 5$ er således

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Opgave 4(a)

Differentialligningssystemet har matrixformen

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Opgave 4 For ethvert reelt talsæt (x_1, x_2, x_3) er givet matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_3 & 3 \\ -18 & -8x_1 \end{pmatrix}.$$

a) Opstil og løs et lineært ligningssystem til bestemmelse af det talsæt (x_1, x_2, x_3) for hvilket $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$.

Opgave 5A En funktion f af to reelle variable x og y er givet ved

$$f(x, y) = x^3 y^2 - 16y - 3x^2.$$

a) Vis, at $(2, 1)$ er et stationært punkt for funktionen f, og bestem typen af dette stationære punkt.

b) Afgør, om funktionen f har lokalt maksimum i punktet $(-1, 0)$.

Opgave 5B Et lineært system har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s - 4}{s^2 + s + 16}.$$

a) Bestem systemets amplitudekarakteristik.

b) Bestem det stationære svar på påvirkningen $u(t) = 3\cos(4t)$.

Opgave 5A besvares af de studerende, der har fulgt kursets variant A: Lokale ekstremumsforhold for funktioner af to variable og overbestemte ligningssystemer.

Opgave 5B besvares af de studerende, der har fulgt kursets variant B: Lineære systemer med periodisk påvirkning og Fourieranalyse.

KUN ÉN AF OPGAVERNE 5A OG 5B MÅ AFLEVERES TIL BEDØMMELSE

OPGAVESÆTTET SLUT

Opgave 5A(b)

Da det ses, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = 3 \cdot (-1)^2 \cdot 0^2 - 6 \cdot (-1) = 6 \neq 0,$$

er $(-1,0)$ ikke et stationært punkt, og derfor har funktionen f *ikke* lokalt maksimum i punktet $(-1,0)$. (Det bliver således slet ikke relevant at se på Hesse-matricen $\mathbf{H}(-1,0)$.)

Opgave 5B(a)

Der gælder

$$A(\omega) = |H(i\omega)| = \left| \frac{i\omega - 4}{-\omega^2 + i\omega + 16} \right| = \frac{|-4 + i\omega|}{|16 - \omega^2 + i\omega|} = \frac{\sqrt{16 + \omega^2}}{\sqrt{(16 - \omega^2)^2 + \omega^2}}.$$

Opgave 5B(b)

Idet

$$H(4i) = \frac{4i - 4}{-16 + 4i + 16} = \frac{4i - 4}{4i} = \frac{i - 1}{i} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4},$$

finder man

$$A(4) = |H(4i)| = \sqrt{2}, \quad \Phi(4) = \arg(H(4i)) = \frac{\pi}{4},$$

og i følge sætning 9.7 er det stationære svar på påvirkningen $u(t) = 3\cos(4t)$

$$y_s(t) = 3\sqrt{2}\cos(4t + \pi/4).$$