Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 24. august 2018

Kursusnavn: **BasisMat 2** - Videregående matematik for diplomingeniører

Kursusnr.: 01920

Tilladte hjælpemidler: Alle

Varighed: 3 timer

"Vægtning": De stillede spørgsmål indgår med lige vægt.

Supplerende oplysninger:
Opgaverne skal regnes i hånden. Dog tillades brug af Maple-kommandoen `RowOperation`. Lommeregner og computer må i øvrigt kun benyttes til kontrol. Alle svar skal begrundes, og der skal anføres mellemregninger og en forbindende tekst, så tankegangen bag besvarelsen fremgår klart.

Opgave 1 Givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 &= 2 \\ 7x_1 + 14x_2 - 17x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned}$$

a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet.

Opgave 2 Der er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) Vis, at vektorerne $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ er egenvektorer for matricen $\mathbf{A}$, og angiv de tilhørende egenværdier.

b) Angiv en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ og en invertibel matrix $\mathbf{S}$, så $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

c) Benyt ligningen $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ til at bestemme matricen $\mathbf{A}^4$.

Opgave 3 For ethvert reelt tal a er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & a \end{pmatrix}.$$

a) Vis, at for $a = 2$ er matricen $\mathbf{A}$ invertibel, og udregn $\mathbf{A}^{-1}$ for $a = 2$.

b) Bestem de tal a for hvilke matricen $\mathbf{A}$ er singulær.

OPGAVESÆTTET FORTSÆTTER PÅ NÆSTE ARK

Opgave 3(a)

Matricen $\mathbf{A}$ med $a = 2$ er invertibel, netop når den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ eksisterer, så vi vil bestemme denne ved at foretage Gauss-Jordan elimination

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_2' = r_2 - 2r_1 \\ r_3' = r_3 + 3r_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3' = r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

På dette sted ses, at der er pivotelementer hele vejen ned i diagonalen på den reducerede matrix $\mathbf{A}$, hvilket viser, at $\mathbf{A}$ er invertibel, og vi fortsætter reduktionen af $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{r_3' = -r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_1' = r_1 + 2r_3 \\ r_2' = r_2 + 4r_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1' = r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right),$$

så det konkluderes, at

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -4 & -13 & -7 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3(b)

En kvadratisk matrix er singulær, netop når dens determinant er lig med 0. Derfor udregnes determinanten af matricen $\mathbf{A}$ for enhver værdi af a, her ved at skaffe et ekstra 0 i anden søjle, inden der opløses efter denne (der er selvfølgelig mange andre måder at gøre det på)

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & a \end{vmatrix} \overset{r_3' = r_3 + 2r_2}{=} \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & a-4 \end{vmatrix} \overset{\text{efter } s_2}{=} 0 + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a & 3 \\ -1 & a-4 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$a \cdot (a-4) - 3 \cdot (-1) = a^2 - 4a + 3.$$

Da får vi, at

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases},$$

altså er matricen $\mathbf{A}$ singulær netop for $a = 1$ og for $a = 3$.

Opgave 4 Givet matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

a) Vis at vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$ er en kompleks egenvektor for matricen $\mathbf{A}$, og angiv den tilhørende komplekse egenværdi.

b) Angiv ved at benytte svaret i a) den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$.

c) Bestem en partikulær løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$, og angiv derefter den fuldstændige reelle løsning til dette differentialligningssystem.

Opgave 5A En funktion f af to reelle variable x og y er givet ved

$$f(x,y) = x^3y^2 + 27(x-1)y.$$

a) Vis, at funktionen f har lokalt minimum i $(3,-1)$ og saddelpunkt i $(1,0)$.

b) Afgør, om funktionen f har lokalt maksimum i $(-1,-4)$.

Opgave 5B Et lineært system

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad , \quad y(t) = \mathbf{r}\mathbf{x}(t).$$

har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Vis, at det lineære system er asymptotisk stabilt.

For et passende valg af $\mathbf{r}$ og $\mathbf{b}$ har det lineære system overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{12+s}.$$

b) Udregn amplitudekarakteristikken $A(\omega)$, og bestem den værdi af frekvensen ω, for hvilken påvirkningen $u(t) = 26\sin(\omega t)$ giver et stationært svar med amplituden 2.

Opgave 5A besvares af de studerende, der har fulgt kursets variant A: Lokale ekstremumsforhold for funktioner af to variable og overbestemte ligningssystemer.

Opgave 5B besvares af de studerende, der har fulgt kursets variant B: Lineære systemer med periodisk påvirkning og Fourieranalyse.

KUN ÉN AF OPGAVERNE 5A OG 5B MÅ AFLEVERES TIL BEDØMMELSE

OPGAVESÆTTET SLUT

Det reducerede homogene ligningssystem er således

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 \quad &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Med $x_2 = t$ fås $x_1 = 5t$, og således er samtlige egenvektorer hørende til egenværdien 7

$$t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der er således én lineært uafhængig egenvektor hørende til egenværdien 7, som derfor har den geometriske multiplicitet

$$\mathrm{gm}(7) = 1.$$

Tilsvarende bestemmes egenvektorerne hørende til egenværdien -2:

$$\mathbf{A} - (-2)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2' = r_2 - \frac{1}{5}r_1} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2' = \frac{5}{19}r_2} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3' = r_3 - 9r_2]{r_1' = r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1' = \frac{1}{5}r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det reducerede homogene ligningssystem er således

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Med $x_1 = t$ fås $x_1 = 2t$, og således er samtlige egenvektorer hørende til egenværdien -2

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der er således én lineært uafhængig egenvektor hørende til egenværdien -2, som derfor har den geometriske multiplicitet

$$\mathrm{gm}(-2) = 1,$$

hvilket jo allerede var kendt, da $\mathrm{am}(-2) = 1$.

Opgave 4(a)

Vi ganger vektoren $\mathbf{v}$ på matricen $\mathbf{A}$ og får

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3+3i \\ 6-4+4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3i \\ 2+4i \end{pmatrix}.$$

Førstekoordinaten for $\mathbf{v}$ er således blevet ganget med $-1+3i$, da

$$(-1+3i)(1-i) = -1+3i+i-3i^2 = -1-4i+3 = 2+4i$$

er også andenkoordinaten for $\mathbf{v}$ ganget med $-1+3i$, hvilket viser, at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ og med tilhørende egenværdi $-1+3i$.

Reduktionen viser, at rangen af $(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3)$ er 2, altså har ligningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ med de 3 variable x_1, x_2 og x_3 uendeligt mange løsninger, så vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært afhængige.

Reduktionen viser tillige, at rangen af $(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_4)$ er 3, altså har ligningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ med de 3 variable x_1, x_2 og x_4 kun nulløsningen, så vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_4$ er lineært uafhængige.

Opgave 4(a)

Vi har reelt tal a matricen og vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -12 & a+5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ a+1 \end{pmatrix}.$$

Vi finder for $a = 5$, at

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

hvilket viser, at for $a = 5$ er $\mathbf{v}$ en egenvektor for matricen $\mathbf{A}$, og den tilhørende egenværdien er 6.

Opgave 4(b)

Generelt fås

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -12 & a+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + (a+1) \\ -24 + (a+5)(a+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+7 \\ a^2 + 6a - 19 \end{pmatrix}.$$

Sammenholdes førstekoordinaterne 2 og $a+7$ for $\mathbf{v}$ og $\mathbf{A}\mathbf{v}$ ses, at er hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor, så må egenværdien være

$$\frac{a+7}{2}.$$

Sammenholdes andenkoordinaterne fås, at $\mathbf{v}$ er egenvektor for matricen $\mathbf{A}$, netop når

$$a^2 + 6a - 19 = \frac{a+7}{2}(a+1) \quad \Leftrightarrow \quad 2(a^2 + 6a - 19) = (a+7)(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + 12a - 38 = a^2 + 8a + 7 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 4a - 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 14}{2} = \begin{cases} 5 \\ -9 \end{cases}.$$

Så ud over for $a = 5$ er $\mathbf{v}$ en egenvektor for $\mathbf{A}$, når $a = -9$. For denne værdi af tallet a er egenværdien

$$\frac{a+7}{2} = \frac{-9+7}{2} = -1.$$

Opgave 5A(b)

Da det umiddelbart ses, at
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$
er $(0,0)$ det andet stationære punkt for f. Vi finder
$$\mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det(\mathbf{H}(0,0)) = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) = -1 < 0$, har funktionen f et *saddelpunkt* i $(0,0)$.

Opgave 5B(a)

Systemet er asymptotisk stabilt, hvis alle egenværdier for systemmatricen $\mathbf{A}$ har negativ realdel. Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ er
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ -4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-7-\lambda) - (-4) \cdot 8 = \lambda^2 + 6\lambda + 25.$$
Diskriminanten er $6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64$, så rødderne, d.v.s. egenværdierne for $\mathbf{A}$, er
$$\lambda = \frac{-6 \pm i \cdot \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i,$$
som har negativ realdel, hvormed det er vist, at systemet er asymptotisk stabilt.

Opgave 5B(b)

Begge led i påvirkningen $u(t) = 2\cos(5t) + 3\sin(5t)$ har frekvensen $\omega = 5$. Da
$$H(5i) = \frac{20 + 4 \cdot 5i}{(5i)^2 + 6 \cdot 5i + 25} = \frac{20 + 20i}{-25 + 30i + 25} = \frac{2+2i}{3i} = \frac{(2+2i) \cdot i}{3i \cdot i} = \frac{2i-2}{-3} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}i,$$
er amplitudekarakteristikken for begge led
$$A(5) = |H(5i)| = \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3})^2} = \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 \cdot 2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{2},$$
og, da $\operatorname{Re}(H(5i)) = \frac{2}{3} > 0$, er fasekarakteristikken for begge led
$$\Phi(5) = \arg(H(5i)) = \arctan(-\tfrac{2}{3}/\tfrac{2}{3}) = \arctan(-1) = -\tfrac{\pi}{4}.$$
Det stationære svar er således (hvor superpositionsprincippet benyttes)
$$y_s(t) = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big(2\cos(5t - \tfrac{\pi}{4})\big) + \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big(3\sin(5t - \tfrac{\pi}{4})\big) = \tfrac{4}{3}\sqrt{2}\cos(5t - \tfrac{\pi}{4}) + 2\sqrt{2}\sin(5t - \tfrac{\pi}{4}).$$