Formelsamling

Finansiering, investering og virksomhedsstrategi

OR-NOTEN

Kapitel 2 - Rentesregning

Notationer

r	Terminslige rente
n	Antallet af tilbageværende terminer
A_0	Nutidige beløb
A_n	Fremtidige beløb
S_0	Nutidsværdi af betalingsrække
S_n	Fremtidige værdi af betalingsrække
b	Terminslige betaling
g	Konstante vækstrate
q	Rentesats pr. deltermin
m	Antal delterminer

Fremdiskontering

(2.1)	$A_n = A_0(1+r)^n$	Størrelsen $(1+r)^n$ kaldes forrentningsfaktoren
(2.2)	$n = \dfrac{\ln(A_n) - \ln(A_0)}{\ln(1+r)} \; for\; r > 0$	
(2.3)	$r = \left(\dfrac{A_n}{A_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$	
(2.4)	$n = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1+r)}$	Fordoblingstiden for at et indestående beløb vokser til det dobbelte

Tilbagediskontering

(2.5)	$A_0 = A_n(1+r)^{-n}$	
(2.6)	$\dfrac{\partial A_0}{\partial r} = \dfrac{\partial A_n(1+r)^{-n}}{\partial r} = -nA_n(1+r)^{-(n+1)} < 0$	Påvirkning på diskonteringsfaktoren ved marginal ændring i renten. Jo højere rente, jo lavere nutidsværdi.
(2.7)	$\forall n > 0: (1+r)^{-n} \to 0 \; for \; r \to \infty$	Det betyder, at når rentesatsen går mod nul, da går diskonteringsfaktoren mod nul.
(2.8)	$\forall n > 0: (1+r)^{-n} \to 1 \; for \; r \to \infty$	Det betyder, at når rentesatsen er nul, vil nutidsværdien være lig det fremtidige beløb selv.
(2.9)	$\dfrac{\partial A_0}{\partial n} = \dfrac{\partial A_0(1+r)^{-n}}{\partial n} = -A_n[\ln(1+r)](1+r)^{-n} < 0$	Det betyder, at en marginal forøgelse i antallet af terminer vil have en negativ effekt på nutidsværdien. Hvis n stiger går der længere tid før der kan

Ingen arbitrage princippet består i, at priserne på varer fastsættes, så der ikke opstår arbitrage muligheder.

Diskonteringsfaktorer og nulkuponobligationer		
(4.1)	$P = \sum_{t=t_1}^{t_n} Y_t d(t)$	Værdien af en obligation, givet ved en portefølje af nulkuponobligationer. Ellers er der klar arbitrage mulighed

Nulkuponrenter og forwardrenter med årlig rentetilskrivning		
(4.2)	$y_1(t) = d(t)^{-\frac{1}{t}} - 1$	Nulkuponrenten givet ud fra diskonteringsfaktoren, opgjort ved årlig rentetilskrivning
(4.3)	$d(t) = \left(1 + y_1(t)\right)^{-t}$	Diskonteringsfaktoren givet ud fra nulkuponrenten, opgjort ved årlig rentetilskrivning
Definitioner: Nulkuponrente: Udtrykker prisen på et lån mellem i dag og et givet fremtidigt tidspunkt Forwardrente: Er en rente der er aftalt i dag om et lån mellem to fremtidige tidspunkter med den egenskab af nutidsværdien af denne aftale er 0.		
(4.4)	$F(t,s) = \frac{d(s)}{d(t)}$	Den teoretiske forwardpris på levering på tidspunkt t af en nulkuponobligation, der giver en krone på tidspunkt s.
Givet sammenhængen mellem den teoretiske forwardpris og forwardrenten $F(t,s) = \left(1 + f_1(t,s)\right)^{-(s-t)}$ Indsættes denne i (4.4) gælder:		
(4.5)	$f_1(t,s) = \left(\frac{d(t)}{d(s)}\right)^{\frac{1}{s-t}} - 1$	Forwardrenten givet ud fra formel (4.4)
(4.6)	$f_1(t,t+1) = \frac{d(t)}{d(t+1)} - 1$	Forwardrenten givet for en fremtidig periode af længden 1
Indsættes sammenhængen mellem diskonteringsfunktionen og nulkuponrenterne fra formel (4.3) i (4.6) fås:		
(4.7)	$f_1(t,t+1) = \frac{\left(1 + y_1(t)\right)^{-t}}{(1 + y_1(t+1))^{-(t+1)}} - 1$	Forwardrenten givet ud fra nulkuponrenterne for den nuværende periode og en fremtidig periode af længden 1.
(4.8)	$d(t)^{-1} = \prod_{j=1}^{t} \left(1 + f_1(j-1,j)\right), t = 1,2, \ldots$	Diskonteringsfunktionen givet ud fra forwardrenterne.
Formel (4.6) medfører		
(4.9)	$d(t+1) = \frac{d(t)}{1 + f_1(t,t+1)}$	Diskonteringsfaktoren for en fremtidig periode givet ud fra forwardrenten og diskonteringsfaktoren for den nuværende periode.

meget af begge disse forhold, og det gør den effektive exercisekurs og dermed værdien af konverteringsretten derfor også. Dette betyder, at låntagerne ikke alle vil konvertere på det samme tidspunkt. Konverteringshyppigheden og dermed obligationsejernes vurdering af optionsværdien vil derfor afhænge af sammensætningen af låntagermasser i obligationsserien.

f) Hvis to låntagere har forskellige skattesatser, så vil de ikke nødvendigvis konvertere et lån i de samme situationer. På tilsvarende vis kan forskellige beskattende investorer vurdere en given konverterbar obligation forskelligt.

g) Til lån, der blev optaget inden 1. januar 1996 ved omlægning af kontantlån optaget før den 19.maj 1993, kan der være knyttet en såkaldt (kurstab-) fradragskonto. Kontoen viser det beløb, der er opstået som forskellen mellem det gamle låns obligationsrestgæld og kontantlånsrestgæld. Beløbet fordeles over det nye låns løbetid i ens portioner, som kan fratrækkes kapitalindkomsten. Ved omlægning på ny overføres saldoen på fradragskontoen til det nye lån. Låntagere med disse lån har derfor både "vekslet" kurstabet ved låneoptagelsen til højere fradragsberettigede renter og samtidig mulighed for at trække kurstabet fra i skat!

h) Kursgevinster ved førtidig indfrielse af kontantlån optaget efter 1. januar 1996 er skattepligtige.

Rentetilpasningslån – Flexlån

Et flexlån (rentetilpasningslån) er et kontantlån, der afvikles efter annuitetsprincippet, men hvor lånerenten tilpasses regelmæssigt. Et flexlån finansieres ved udstedelse af stående obligationer med løbetider fra 1 måned op til 11 år. Da et Flexlån kan løbe op til 30 år, skal der imidlertid i lånets løbetid udstedes nye obligationer i takt med at de gamle indfries. De nye obligationer udstedes så til markedskurs, hvorved lånerenten løbende tilpasses markedsrenten.

Herefter kan vi definere A, B, C og D

(4.5)	$A = \bar{r}^T \sum^{-1} \bar{r}$ $B = \mathbf{1}^T \sum^{-1} \bar{r}$ $C = \mathbf{1}^T \sum^{-1} \mathbf{1}$ $D = AC - B^2$	Disse bruges til beregning af forv. afkast og varians på hhv. Minimum-varians pf. Hældningspf. Tangentpf.

Det følger heraf, at
$\bar{\mu} = \alpha A + \beta B \; og \; 1 = \alpha B + \beta C$

Dette giver to ligninger med to ubekendte ($\alpha \; og \; \beta$)
$\alpha \; og \; \beta$ kan finde ved at isolere for hhv. $\alpha \; og \; \beta$

(4.6)	$\alpha = \frac{\bar{\mu}C - B}{D}, \beta = \frac{A - \bar{\mu}B}{D}$	Hvoraf D fremkommer ved at isolere i de to ligninger. Se formel (4.5) for D

Ved at indsætte ovenstående i formel (4.4) fås

(4.7)	$x(\bar{\mu}) = \frac{\bar{\mu}C - B}{D} \sum^{-1} \bar{r} + \frac{A - \bar{\mu}B}{D} \sum^{-1} \mathbf{1}$	Formel for beregning af porteføljevægtene for efficiente porteføljer
(4.8)	$\sigma_p^2(\bar{\mu}) = x(\bar{\mu})^T \sum x(\bar{\mu}) = \frac{C\bar{\mu}^2 - 2B\bar{\mu} + A}{D}$	Variansen for efficiente porteføljer

De optimale kombinationer af variansen og middelværdien danner en parabel i et (middelværdi,varians) diagram.

Se tegning i noter fra BB om middelværdi-varians analyse

(2.15)	$d_f(t,T) = \frac{1}{1+y_f^s(t,T)(T-t)}$	Den udenlandske diskonteringsfaktor ved simpel rentetilskrivning, hvor y_f^s er pengemarkedsrenten for den pågældende valuta for perioden fra t til T
(2.16)	$F(t;T) = \frac{1+y^s(t,T)(T-t)}{1+y_f^s(t,T)(T-t)}S(t)$	Arbitragefri valutaterminskurs
(2.17)	$F(t;T) - S(t) = \frac{\left[y^s(t,T) - y_f^s(t,T)\right](T-t)}{1+y_f^s(t,T)(T-t)}S(t)$	Terminstillægget
(2.18)	$F(t;T) - S(t) \approx \left[y^s(t,T) - y_f^s(t,T)\right](T-t)S(t)$	
	Forwards på reale aktiver	
	$F(t;T) = \frac{S(t)+L(t,T)}{d(t,T)}$	Den arbitragefri forwardpris. Her er $L(t,T)$ lageromkostningerne fra tidspunkt t til T.
(2.19)	$F(t;T) < \frac{S(t)+L(t,T)}{d(t,T)}$	Arbitragemulighed

Arbitragestrategier
Hvis
$F(t,T) > \frac{S(t)+L(t,T)}{d(t,T)}$

	t	T
Sælg forward	0	-(S(t)-F(t,T))
Lån NV(F)	dt,T)F(t,T)	-F(t,T)
Køb underliggende aktiv	-S(t)	S(T)
Betale lageromk.	-L(t,T)	0
Sum	d(t,T)F(t,T)-S(t)-L(t,T)	0

Hvis
$F(t,T) < \frac{S(t)+L(t,T)}{d(t,T)}$

	t	T
Køb forward	0	S(t)-F(t,T)
Sælg underliggende aktiv	S(t)	-S(T)
”spare” lageromk.	L(t,T)	0
Indsæt NV(F) i banken	-d(t,T)F(t,T)	F(t,T)
Sum	S(t)+L(t,T)-d(t,T)F(t,T)	0

	Et generelt resultat	
	$V(t;T,K) = d(t,T)[F(t;T) - K]$	Værdien af en forwardkontrakt på et vilkårligt tidspunkt t
	$F(T;T) = S(T)$	Forwardprisen ved øjeblikkelig levering. Hvis ikke vil der være en klar arbitrage strategi

Forward-markeder

Handel med afledte aktiver sker enten på børser eller **over-the-counter (OTC)**.
På børser afvikles handlerne via en **clearing-central.** En handel med et afledt aktiv opdeles i 2